Revisión de literatura
Teoría de juegos

Rodrigo Leo

Noviembre 2020

El objetivo de este documento es presentar una breve revisión del artículo seminal de Douglas Diamond y Philip Dybvig acerca de la forma en que los depósitos a la vista que ofrecen los bancos otorgan retornos esperados superiores a los que podrían obtenerse mediante intercambio directo entre agentes, aun cuando se encuentran sujetos al riesgo de perderse debido a una corrida o pánico bancario.

La relevancia del artículo desde el punto de vista de la teoría de juegos reside en la caracterización de las dos soluciones del modelo (una de las cuales consiste en una corrida bancaria) como equilibrios de Nash. El modelo es un juego dinámico de dos periodos con información incompleta, en donde existen tipos de agentes con distintas utilidades de consumo. El tipo de cada agente se determina al inicio y es información privada, lo cual hace imposible establecer contratos óptimos condicionales al tipo de agente. Sin embargo, el modelo muestra que un banco es capaz de proveer una solución tan buena como la de un planeador central que observe los tipos privados, con riesgo de que aparezca una corrida bancaria como «mal equilibrio» del juego.

El documento sigue fundamentalmente el orden y la notación de los autores (Diamond y Dybvig, 1983). Para las secciones menos explícitas del artículo me fue de ayuda la descripción del libro de texto de macroeconomía de David Romer (2019), aunque conservando la función de utilidad genérica del texto original. A modo de conclusión presento brevemente las dos propuestas que los autores hacen para eliminar el riesgo de una corrida bancaria: la suspensión de pagos y los seguros de depósitos bancarios.

1. Construcción del modelo

Consideremos tres periodos de tiempo ($t = 0, 1, 2$) y un único bien homogéneo en la economía. Existe una tecnología productiva tal que, por cada unidad invertida en $t = 0$, retorna $R > 1$ en $t = 2$. Sin embargo, es posible interrumpir la inversión y liquidarla en $t = 1$, en cuyo caso el retorno es igual a la unidad invertida inicialmente. La tecnología productiva se puede representar entonces como Y_t, es decir, el retorno correspondiente en $t > 0$ de una unidad invertida en $t = 0$:

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si el agente retira} \\ 0 & \text{si el agente no retira} \end{cases} \qquad Y_2 = \begin{cases} R & \text{si el agente retira} \\ 0 & \text{si el agente no retira} \end{cases}$$

Nótese que, en caso de liquidar antes de la maduración (es decir, en $t = 1$), el vector de retornos es $(1, 0)$, mientras que si se liquida en la maduración, el retorno es $(0, R)$. La elección entre $(1, 0)$ y $(0, R)$ se hace en $t = 1$.

En $t = 0$ todos los agentes son idénticos. Sin embargo, en $t = 1$, cada uno aprende que pertenece a uno de dos tipos posibles: los agentes tipo 1 («impacientes») obtienen utilidad de consumir únicamente en $t = 1$; mientras que los agentes tipo 2 («pacientes») obtienen utilidad de consumir únicamente en $t = 2$. Además, los agentes pueden almacenar sin costo unidades del bien de consumo entre periodos.

Es importante notar que nadie almacenará su bien de consumo entre $t = 0$ y $t = 1$, porque invertir en la tecnología productiva produce al menos el mismo retorno que no hacerlo, y de hecho más si resulta que finalmente el agente es paciente y espera hasta $t = 2$ para obtener R. Para ver esto, consideremos las acciones disponibles para un agente en $t = 0$: si la invierte en la tecnología, su retorno esperado es

$$\Pr[\text{tipo 1}](1) + \Pr[\text{tipo 2}](R) = 1 + \Pr[\text{tipo 2}](R - 1) \geq 1$$

mientras que, si no la invierte, su retorno esperado es

$$\Pr[\text{tipo 1}](1) + \Pr[\text{tipo 2}](1) = 1$$

Por lo tanto, almacenar el bien en $t = 0$ no es óptimo, ya que es débilmente dominado por invertir en la tecnología.

Denotaremos las unidades de bien *recibido* en t (para consumo o almacenamiento) como c_t. El consumo (privado) de un agente tipo 2 en $t = 2$ es la suma de lo que almacena en 1 más lo que obtiene en 2: $c_1 + c_2$ (pues en el periodo 2 se consume todo). La utilidad del agente tiene la siguiente forma:

$$U(c_1, c_2) = \begin{cases} u(c_1) & \text{si es del tipo 1} \\ \rho u(c_1 + c_2) & \text{si es del tipo 2} \end{cases}$$

donde

- ρ es el factor de descuento del consumo futuro, y satisface $R^{-1} < \rho \leq 1$ (esta condición implica que $\rho R > 1$, lo que permite encontrar soluciones convenientes para el modelo).
- La utilidad $u : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ satisface $u \in \mathcal{C}^2$, creciente, estrictamente cóncava y las condiciones de Inada: $\lim_{c \to 0} u(c) = \infty$ y $\lim_{c \to \infty} u(c) = 0$.
- El coeficiente de aversión relativa al riesgo es siempre mayor a 1: $r_R = -cu''(c)/u'(c) > 1$.

Finalmente: suponemos que una proporción $0 < \theta < 1$ de los agentes es del tipo 1. Asumimos que, condicional en t, cada agente tiene la misma probabilidad de ser de tipo 1, y las realizaciones de los tipos son independientes entre agentes. Cada consumidor posee una dotación inicial igual a una unidad de bien de consumo en $t = 0$.

2. Dos soluciones base

Antes de analizar el papel que juega un banco en esta economía, es útil considerar dos casos base que servirán para comparar la mejora que puede representar un banco. El primero consiste en un escenario donde los agentes almacenan e intercambian por sí mismos los bienes que reciben como dotación inicial, mientras que en el segundo los tipos realizados de los agentes son públicamente observables, y por lo tanto se puede determinar el consumo óptimo para cada tipo de agente desde el inicio. Esta segunda solución es equivalente a la de un planeador social que observa el tipo de cada agente y redistribuye en función del mismo.

Solución competitiva Observamos que, como los agentes deben decidir en $t = 0$ si invierten o no, y dado que en dicho periodo no es óptimo almacenar el bien de consumo, entonces todos invierten su dotación inicial en la tecnología productiva. En $t = 1$, cuando cada agente conoce su tipo, quienes son de tipo 1 liquidan su inversión y obtienen su unidad de bien para consumirlo. Quienes son de tipo 2 mantienen la inversión. En $t = 2$, estos últimos obtienen R unidades de bien para consumir por completo.

Denotaremos c_t^k el consumo del agente del tipo $k \in \{1, 2\}$ en el periodo t. Así, bajo este primer concepto de solución, los agentes de tipo 1 consumen $c_1^1 = 1$, $c_2^1 = 0$; mientras que los agentes de tipo 2 consumen $c_1^2 = 0$, $c_2^2 = R$.

Solución bajo un planeador Bajo este concepto, suponemos que los tipos son públicamente observables, o bien que existe un planeador social que los conoce con certidumbre cuando se realizan en $t = 1$. En este caso, dado que los agentes de tipo 1 obtienen utilidad únicamente por su consumo en $t = 1$ y los de tipo 2 por su consumo en $t = 2$, el planeador establece necesariamente los consumos óptimos de forma que ${c_2^1}^* = 0$ y ${c_1^2}^* = 0$. De esta forma, únicamente quedan por determinar ${c_1^1}^*$ y ${c_2^2}^*$.

Adicionalmente, se debe satisfacer la restricción siguiente:

$$\theta {c_1^1}^* + \frac{(1-\theta){c_2^2}^*}{R} = 1$$

El razonamiento de esta condición es como sigue: una inversión liquidada anticipadamente retorna una unidad de bien. Por lo tanto, la proporción de inversiones liquidadas anticipadamente debe ser igual a θ (la proporción de agentes impacientes) multiplicada por c_1^1 (el consumo de un agente de tipo 1 en el periodo 1): θc_1^1. Entonces, la proporción de inversiones liquidadas en la maduración es $1 - \theta c_1^1$. Cada una de estas inversiones maduras retorna R unidades de bien. El retorno total de estas inversiones se divide entre la proporción de la población que es paciente $(1 - \theta)$ para obtener el consumo de un agente de tipo 2 en el periodo 2:

$$\frac{(1-\theta c_1^1)R}{1-\theta} = c_2^2 \quad \text{es decir,} \quad \theta c_1^1 + \frac{(1-\theta)c_2^2}{R} = 1$$

La utilidad esperada de un agente representativo es:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U] &= \theta U(c_1, c_2 \mid \text{tipo } 1) + (1-\theta) U(c_1, c_2 \mid \text{tipo } 2) \\ &= \theta u(c_1^1) + (1-\theta)\rho u(c_2^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo con la expresión para c_2^2:

$$\mathrm{E}[U] = \theta u(c_1^1) + (1-\theta)\rho u\left(\frac{R(1-\theta c_1^1)}{1-\theta}\right)$$

La condición de primer orden es:

$$\theta u'({c_1^1}^*) = R\rho u'\left(\frac{R(1-\theta {c_1^1}^*)}{1-\theta}\right) = R\rho u'({c_2^2}^*)$$

Esta condición, junto con el hecho de que el coeficiente de aversión relativa al riesgo es mayor a 1 para cualquier c, implican que ${c_1^1}^* > 1$ y ${c_2^2}^* < R$. Por lo tanto, el planeador central transferirá recursos del tipo 2 al tipo 1, lo cual tiene sentido dado que los agentes tipo 1 valoran especialmente el consumo. Por otra parte, si bien ${c_2^2}^*$ es menor que el nivel que tenía en la solución competitiva, el hecho de que $\rho R > 1$ implica que ${c_2^2}^* > {c_1^1}^*$, es decir, los agentes pacientes logran un mayor consumo como «premio» a su paciencia al permitir que la inversión realizada madure.

Resumen Con el objetivo de llevar a cabo una comparación, la tabla siguiente muestra las soluciones del modelo bajo los dos escenarios base descritos anteriormente:

	Mercado competitivo	Planeador central
Agente tipo 1	$c_1^1 = 1$	${c_1^1}^* > 1$
	$c_2^1 = 0$	${c_2^1}^* = 0$
Agente tipo 2	$c_1^2 = 0$	${c_1^2}^* = 0$
	$c_2^2 = R$	${c_1^1}^* < {c_2^2}^* < R$

La utilidad esperada a priori bajo el mercado competitivo es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[U] &= \theta U(c_1, c_2 \mid \text{tipo } 1) + (1-\theta) U(c_1, c_2 \mid \text{tipo } 2) \\
&= \theta u(c_1^1) + (1-\theta)\rho u(c_1^2 + c_2^2) \\
&= \theta u(1) + (1-\theta)\rho u(R)
\end{aligned}$$

Mientras que bajo la solución provista por un planeador central es:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U^*] &= \theta U(c_1^*, c_2^* \mid \text{tipo } 1) + (1-\theta) U(c_1^*, c_2^* \mid \text{tipo } 2) \\ &= \theta u({c_1^1}^*) + (1-\theta)\rho u({c_2^2}^*) \end{aligned}$$

Calculando la diferencia entre ambas:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U^*] - \mathrm{E}[U] &= \theta u({c_1^1}^*) + (1-\theta)\rho u({c_2^2}^*) - \theta u(1) - (1-\theta)\rho u(R) \\ &= \theta[u({c_1^1}^*) - u(1)] + (1-\theta)\rho[u({c_2^2}^*) - u(R)] > 0 \end{aligned}$$

Nota. La observación de que la expresión anterior es positiva se puede derivar del hecho de que $u(\cdot)$ es estrictamente creciente y cóncava y de que los parámetros satisfacen la relación $1 < {c_1^1}^* < {c_2^2}^* < R$.

Por lo tanto, la solución provista por un planeador central capaz de observar las realizaciones de los tipos en $t = 1$ es mejor que la obtenida bajo el equilibrio competitivo anterior.

3. El papel de un banco

El trabajo de Diamond y Dybvig muestra que la introducción de un banco es capaz de proveer la solución del primer óptimo sin necesidad de un planeador social ni de observar públicamente los tipos. En sus propias palabras, «proveyendo liquidez, los bancos garantizan un retorno razonable cuando el inversor liquida antes de la madurez, como se requiere para compartir óptimamente el riesgo». Este riesgo se refiere al de resultar ser de tipo 1 e incurrir en la necesidad de liquidar anticipadamente la inversión.

Los supuestos del modelo de banco son los siguientes:

- El banco recibe depósitos en $t = 0$.
- Un agente que desee liquidar en $t = 1$ recibirá una cantidad r_1 por unidad depositada.

- El banco se liquida por completo en $t = 2$, por lo que en ese momento todos los agentes que no hayan retirado en $t = 1$ recibirán una parte proporcional de los activos bancarios.

Una característica fundamental del modelo es que los depositantes que quieren retirar su dinero son atendidos de forma secuencial (es decir, uno a la vez) hasta que el banco se queda sin activos. En el momento en que esto ocurre, quienes aún no liquidan su inversión no obtienen nada. En caso de que todos los agentes deseen retirar, la probabilidad de que uno en particular obtenga su dinero depende únicamente de la posición que ocupe en la fila de espera. Finalmente, denotaremos por V_1 el pago del periodo 1 por unidad depositada en $t = 0$, y V_2 el pago del periodo 2 por unidad *no liquidada* en $t = 1$.

Si denotamos f_j a la fracción de depósitos que han sido liquidados en $t = 1$ antes de que el agente j reclame el suyo, entonces podemos escribir V_1 como:

$$V_1(f_j, r_1) = \begin{cases} r_1 & \text{si } f_j < \frac{1}{r_1} \\ 0 & \text{si } f_j \geq \frac{1}{r_1} \end{cases}$$

(Recordamos que r_1 es la cantidad que recibe el agente, siempre y cuando aún quede dinero en el banco, es decir, si $f_j r_1 < 1$).

Por otra parte, si denotamos f al total de depósitos liquidados, entonces el pago V_2 es:

$$V_2(f, r_1) = \text{máx}\left\{R\frac{1 - r_1 f}{1 - f}, 0\right\}$$

(Evidentemente, si $fr_1 > 1$, significa que el banco se quedó sin activos en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ no queda nada por repartir, y entonces $V_2 = 0$).

Finalmente, para encontrar la solución del modelo, denotaremos por w_j la proporción de depósitos del agente j que desea liquidar en $t = 1$. Entonces, el consumo proveniente del rendimiento de los depósitos es $w_j V_1(f_j, r_1)$ para agentes tipo 1 («impacientes») y $w_j V_1(f_j, r_1) + (1 - w_j)V_2(f, r_1)$ para agentes tipo 2 («pacientes»).

A continuación consideramos:

Si $r_1 = {c_1^1}^*$ y $f_j = \theta$, entonces:

$$V_1(\theta, {c_1^1}^*) = \begin{cases} {c_1^1}^* & \text{si } \theta < \frac{1}{{c_1^1}^*} \\ 0 & \text{si } \theta \geq {\frac{1}{c_1^1}}^* \end{cases} = {c_1^1}^*$$

y además

$$V_2(\theta, c_1^{1*}) = \text{máx}\left\{R\frac{1-\theta c_1^{1*}}{1-\theta}, 0\right\} = c_2^{2*}$$

Como $c_2^{2*} > c_1^{1*}$, entonces todos los agentes de tipo 2 prefieren esperar a $t = 2$ para liquidar, con lo que $w_j = 1$ para agentes tipo 1, y $w_j = 0$ para agentes tipo 2. Esta solución constituye un equilibrio en el cual resulta óptimo para todos los agentes impacientes liquidar en $t = 1$, y para todos los agentes pacientes liquidar en $t = 2$, con lo cual el riesgo de la liquidación anticipada se distribuye óptmamente entre todos, sin necesidad de contar con información perfecta o tipos observables.

Por otra parte, consideremos una segunda solución, en la cual cada agente sabe que todos los demás tratarán de liquidar sus depósitos en $t = 1$. En este caso el agente sabe que si llega tarde a reclamar su inversión ($f_j = 1$ en el caso extremo), entonces obtendrá $V_1(1, r_1) = 0$, y esto es así *independientemente* del tipo que sea (paciente o impaciente).

Esta segunda solución también constituye un equilibrio y corresponde a una corrida bancaria. Bajo ésta, todos los agentes tienen un rendimiento esperado (promedio) igual a 1, mientras que en la solución de mercado competitivo todos los agentes obtenían un rendimiento cierto (sin riesgo) de al menos 1. Y en el caso de la solución bajo un planeador (alcanzable mediante un mecanismo como el del banco descrito anteriormente) todos los agentes obtienen un rendimiento estrictamente mayor a 1. Observamos claramente que la corrida bancaria es el peor de los tres escenarios, y que si los agentes supieran con certeza que va a ocurrir, preferirían retener por sí mismos su unidad de bien.

Este tipo de segundo equilibrio existe siempre que r_1 (el valor de liquidación anticipada por unidad depositada en $t = 0$) sea mayor a 1. Si $r_1 = 1$, entonces no tiene sentido la existencia de un banco, pues éste simplemente retiene los depósitos sin no paga ningún rendimiento por ellos, por lo que equivale a la solución de mercado competitivo considerada inicialmente. Y evidentemente $r_1 < 1$ no tiene sentido económico (equivale a un rendimiento negativo).

4. Conclusión

Es interesante notar que la posibilidad de una corrida no depende necesariamente del mecanismo o las políticas del banco, sino más bien de la creencia acerca de lo que harán los demás. Esta creencia puede formarse directamente (si el agente observa que los demás están liquidando súbitamente sus inversiones, por ejemplo) o también indirectamente, mediante señales como una corrida en un banco diferente o un escenario económico que se prevé adverso. Por este motivo, es esencial para la sostenibilidad de un banco la certeza que otorgue sobre su liquidez.

A continuación, el artículo examina las siguientes propuestas para eliminar la posibilidad de una corrida:

1. Suspensión de convertibilidad Este tipo de política consiste en una restricción que impide a los agentes liquidar sus inversiones en $t = 1$ si el número de liquidaciones previas es superior a cierto límite. Esta política, al ser pública, elimina el incentivo de los agentes tipo 2 de liquidar anticipadamente sus depósitos, al mismo tiempo que mantiene su utilidad, ya que estos agentes, por definición, prefieren consumir hasta $t = 2$.

Esta solución, sin embargo, asume implícitamente que θ es conocido y constante, lo cual permite fijar con certeza el umbral a partir del cual se suspende la liquidación anticipada de depósitos. En un modelo más realista, donde la proporción θ de agentes sea estocástica, la solución óptima equivalente a la de un planeador central no se puede alcanzar, y la política de suspensión de convertibilidad funciona sólo para prevenir corridas, pero entraña el riesgo potencial de que, dado que θ se desconoce con certeza, se detenga la liquidación anticipada antes de tiempo (en equilibrio), llevando a una nueva situación que resulta subóptima, pues una proporción de agentes tipo 1 que aún podían liquidar anticipadamente terminan con utilidad cero.

2. Seguro de depósitos Un seguro de depósitos consiste en una garantía, ofrecida por el gobierno, de que a todo aquél que quiera liquidar su inversión le será pagada la cantidad r_1 pactada. El artículo muestra a modo de proposición que los depósitos a la vista respaldados por una garantía gubernamental completa alcanzan el equilibrio de Nash óptimo (el primer mejor), eliminando la posibilidad de una corrida bancaria. Esto se logra mediante un impuesto sobre los bienes que se hayan retenido en $t = 1$. Gracias al seguro de depósitos, no es óptimo para ningún agente de tipo 2 participar en una corrida, independientemente de lo que hagan los demás o de las creencias que se formen respecto a ello.

Referencias

DIAMOND, DOUGLAS W. y DYBVIG, PHILIP H. (1983). «Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity». *Journal of Political Economy*, **91(3)**, pp. 401–419. ISSN 1537534X. doi: 10.1086/261155.

ROMER, DAVID (2019). *Advanced Macroeconomics*. New York, N.Y. : McGraw-Hill/Irwin, 2019, New York, N.Y, 5.ª edición. ISBN 9781260185218.